

לא על הספר לבדו

אנא וקנין



כנס ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
שפיים - יוני 2019

581 - חדו"א, שאלות מילוליות ▶▶

מבט על השינויים בבחינות הבגרות ▶▶

הדגשים בהוראה חט"ב- חט"ע ▶▶

הצרכים שלנו כמורים ▶▶

המשאבים העומדים לרשותנו ▶▶



אנליזה מה חדש? הדגשים ומקורות

פונקציית פולינום מנה ושורש 2009 ← 2018

קיץ 2018

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$. a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. הוכח: $a > 1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a .

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a = 3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x = 2$ ו- $x = \frac{2}{3}$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x .

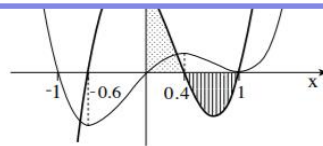
נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = b$.
($b > \frac{1}{3}$)

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = b$:
שווה ל- $2S$ בעבור כל b .

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x > \frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את תשובתך.

קיץ 2009 מועד א'

אי שיוויון לכל ערך של x



והגרף האחר הוא הגרף של פונקציית

הנגזרת השנייה $f''(x)$.

א. איזה גרף הוא של $f'(x)$,

ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמק.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ג. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הוכח שהשטח המוגבל על ידי גרף II וציר ה- x (השטח המקווקו בציור)

שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II והצירים (השטח המנוקד בציור).

שיקולים של שיקוף ומתיחה בחישוב

שטח באמצעות אינטגרל

פונקציה טריגונומטרית 2009 ← 2018

קיץ 2018 מועד א'

7. $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x , כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x .

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע:

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x .

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. באותה מערכת צירים שבה סרטטת את

גרף הפונקציה $g(x)$.

קיץ 2009 מועד א'

נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

א. הראה כי $f'(x) = 2\sin^2 x$.

ב. (1) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

ג. בצויר שלפניך מוצג הגרף

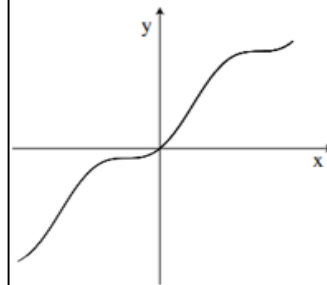
של הפונקציה $g(x) = x + \sin^2 x$

בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

בתחום הנתון מצא את כל השטח

המוגבל על ידי הגרף של $g(x)$

ועל ידי הישר $y = x$.



פונקציה טריגונומטרית 2009 ← 2018

קיץ 2019 מועד א'

הוכחה כללית



זוגיות



מחזוריות



השלמת גרף על סמך מחזוריות וזוגיות



הרכבת פונקציה שיקולים איכותניים



7. $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x , כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x .

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע:

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x .

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטת את

גרף הפונקציה $g(x)$.



מי הזיז את הגבינה שלי ?

אזכרוס עם השיוני

ספנסר ג'ונסון
מחבר הרב-מכר THE ONE MINUTE MANAGER®

מה רואים?



ככל שתמהר
להניח לגבינה הישנה,
כך תקדים
למצוא גבינה חדשה.



יותר שיקולים איכותניים



יותר פעולות על פונקציות



יותר תכונות של משפחות פונקציות



פחות תרגילים מוכרים וידועים



פחות תהליכים פרוצדורליים בפתרון

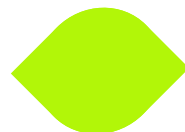
דגשים בהוראת אנליזה

הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

הסקת מסקנות במעברים בין פונקציה, נגזרתה והנגזרת השנייה שלה
חישוב אינטגרל מסוים איכותני בהינתן גרף ללא ביטוי סימבולי

פעולות על פונקציות

שיקופים, הזזות, מתיחות, הרכבה



תכונות של פונקציות

שליטה בפונקציות בסיסיות ותכונותיהן ללא
שימוש בנגזרת, מחזוריות, זוגיות, אי זוגיות
והשפעת הפעולות על כל אחת מהתכונות.

שיקולים איכותניים בחישוב אינטגרלים

שיקולי זוגיות בחישוב אינטגרל
הזזה אופקית/אנכית של שטח
חישוב אינטגרל של פונקציה לאחר כיווץ/מתיחה אנכית

ועוד

תכנית הלימודים כיתה ט'

הרכבה של הזזות אופקיות, אנכיות, מתיחה וכיווץ של הפונקציה $f(x) = x^2$ פונקציות שהביטוי האלגברי שלהן הוא:

$$g(x) = (x - p)^2, m(x) = a(x - p)^2, t(x) = a(x - p)^2 + k \quad (\text{כאשר } a \neq 0)$$

דגשים:

יש לשרטט גרפים של פונקציות מהצורה $g(x) = (x - p)^2$ ובעבור ערכים שונים של p . הפרבולה המתאימה לפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ מתקבלת מהזזה אופקית של הפרבולה $f(x) = x^2$ ב- p יחידות. מכיוון שגרפים אלה מתקבלים מהזזות של הגרף $f(x) = ax^2$ גם הם פרבולות.

ציר הסימטריה של גרף הפונקציה $g(x) = (x - p)^2$ הוא $x = p$ והקדקוד ממוקם בנקודה $(p, 0)$. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2$ מתקבלות מהזזה אופקית של הפרבולה $y = ax^2$ או ממתחה של הפרבולה $y = (x - p)^2$.

פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אנכית של הפרבולה $y = a(x - p)^2$. פרבולות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ מתקבלות מהזזה אופקית, שאחריה מתיחה והזזה אנכית של הפרבולה $y = x^2$.

בפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$ ציר הסימטריה הוא $x = p$, שיעורי הקדקוד הם (p, k) , והסימן של המקדם a מבדיל אם לפרבולה יש נקודת מינימום או נקודת מקסימום. יש לדעת למצוא תחומי חיוביות ושליליות לפונקציות מהצורה $y = a(x - p)^2 + k$

מגרף לתכונות ובחזרה - משרד החינוך הרציונל ליחידת הלימוד

היחידה מהווה מבוא לאנליזה, נושא שנילמד בכיתה י'.

במסגרת היחידה מרחיבים את ההבנה על מושג הפונקציה והמושגים הנילויים כמו תחום עליה ותחום ירידה, תחום חיוביות ותחום שליליות, פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

במסגרת יחידת הלימוד מובא לידיעת התלמידים שקיימים ייצוגים שונים של הפונקציה והם יכירו פונקציות שלא נחשפו אליהן קודם (כמו קוויות או ריבועיות). המטרה היא שהתלמידים יזהו פונקציות בייצוגים שונים.

יחידה זו מאפשרת לחזק נושאים בטכניקה אלגברית, כמו פתרון אי שוויונות.

פיתוח "חוש לפונקציות"

(מתוך טיוטת תוכנית הלימודים החדשה ל 5 יח"ל עמ' 60-59)

"חוש לפונקציות" כולל את היכולת לשייך פונקציה למשפחה שלה, לזהות את התכונות המשותפות למשפחה (Confrey, 1994) והטרנספורמציות הן כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה.

פיאז'ה טען כי "כדי לדעת (להבין) אובייקט יש לפעול עליו", ולכן פעילויות עם ועל פונקציות מקדמות את ההבנה של מושג הפונקציה.

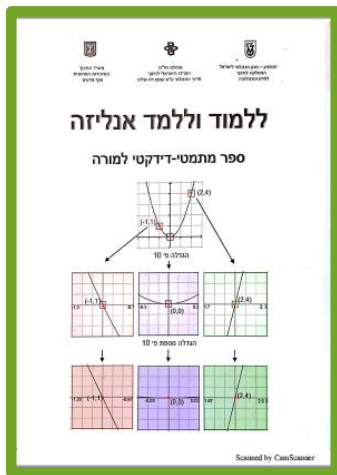
על התלמידים לרכוש מאגר ידע של פונקציות בסיסיות (מפורטות להלן) ולדעת את הנוסחה האלגברית שלהן ואת צורת הגרף המתאימה. התלמידים צריכים לרכוש מיומנות להפעיל סדרת פעולות על פונקציית הבסיס כדי ליצור פונקציה חדשה (Eisenberg & Dreyfus, 1994).



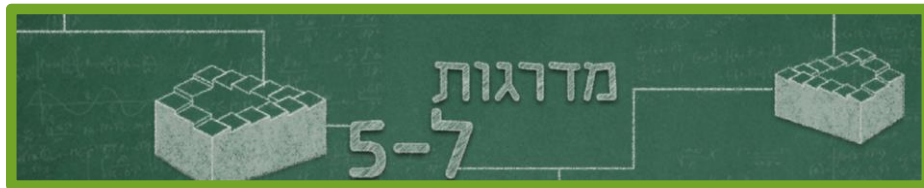
כשאני מדמיין את עצמי
מתענג על גבינה חדשה
עוד בטרם מצאתי אותה –
אני מוביל את עצמי
אליה.

חומרי הוראה ולמידה

טיפ 5



המרכז הארצי למורים למתמטיקה
בחינוך העל יסודי
المركز القطري لعلمي الرياضيات للمرحلتين الاعدادية والثانوية



האתגר 5
מתמטיקה 5 יח"ל

פאקראפ



משימטיקה



המחלקה להוראת המדעים

חומרי הוראה ולמידה



המרכז הארצי למורים למתמטיקה
בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات للمرحلتين الابتدائية والثانوية



האתגר 5 מתמטיקה 5 יח"ל



טיפ 5

לקראת



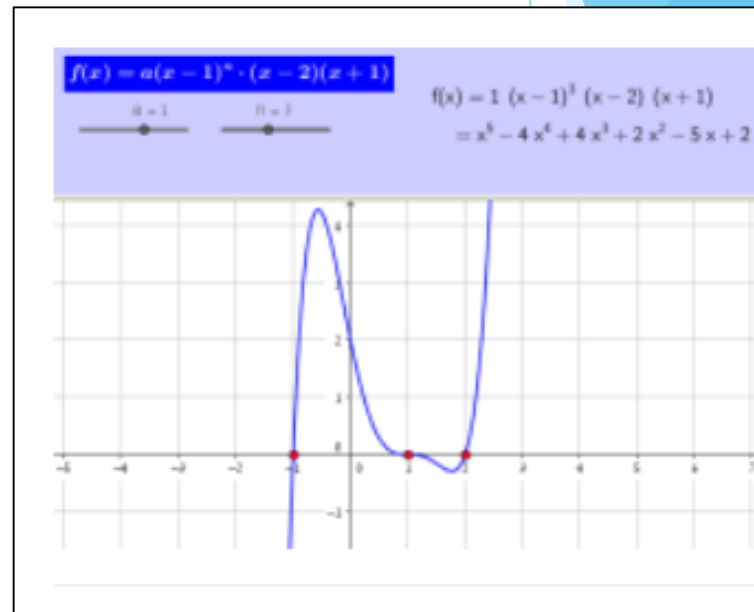
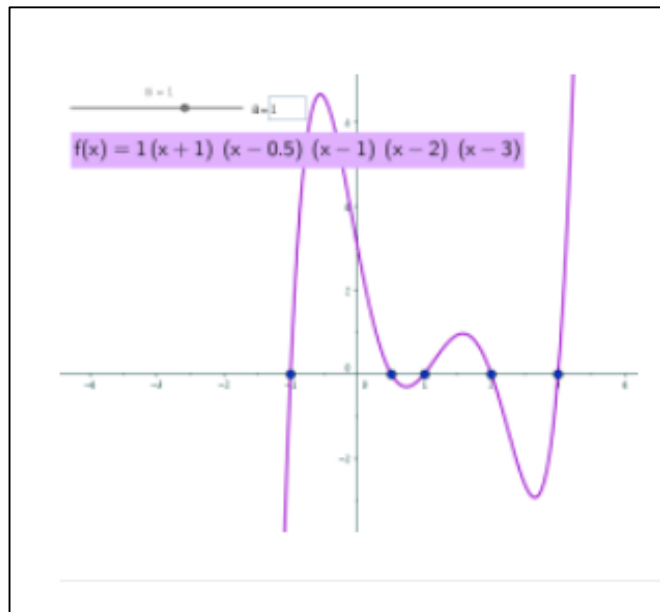
משימטיקה



המחלקה להוראת המדעים



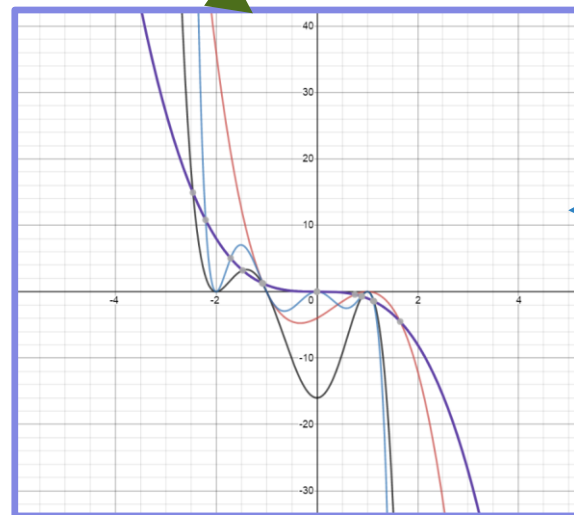
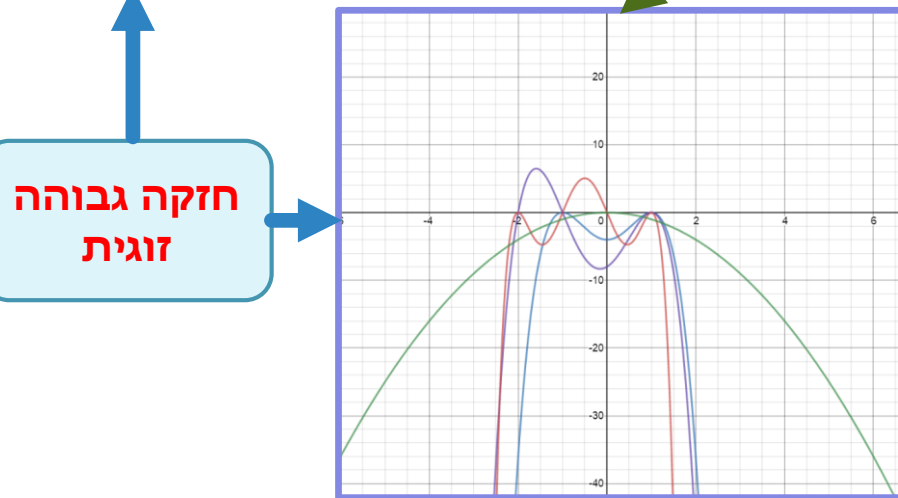
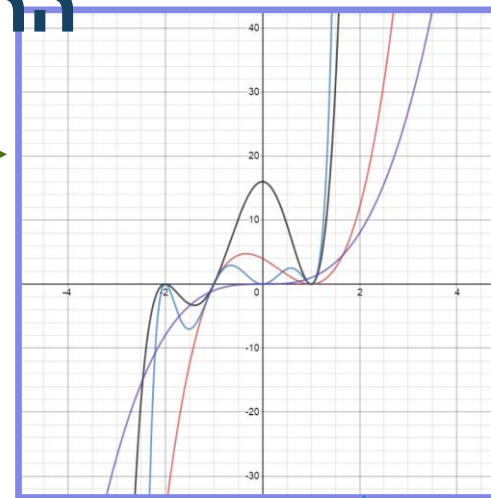
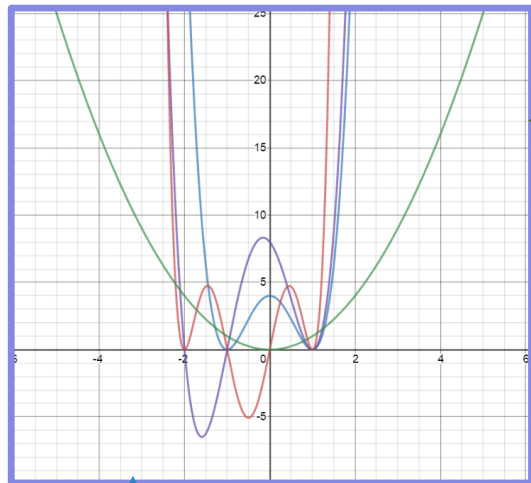
ריבוי השורש של פולינום



ההתנהגות הגלובלית של פולינום

מקדם מוביל
חיובי

מקדם מוביל
שלילי

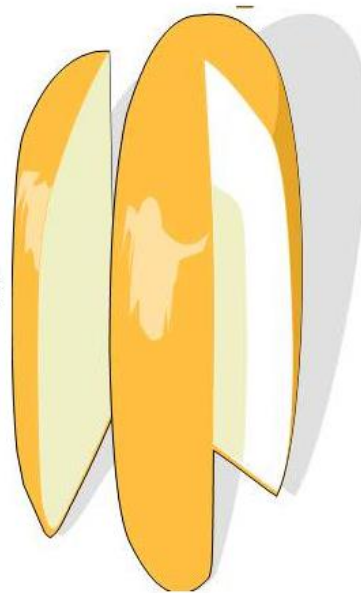


חזקה גבוהה
זוגית

חזקה גבוהה
אי זוגית



כשאתה רואה
שאתה יכול
למצוא גבינה חדשה
וליהנות ממנה,
סימן ששינית את הכיוון.



ההתנהגות הגלובלית של פונקציית פולינום

פעילות 9: הסקת תכונות של פונקציות פולינום על-פי התנהגותן הגלובלית

1. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה שלישית יש נקודת קיצון אחת בלבד?
אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?

2. נתון כי לפונקציה $y = -2x^3 + 4x^2 - 1$ יש שתי נקודות קיצון. האחת כאשר $x = 0$, והשנייה כאשר $x = \frac{4}{3}$. איזו נקודה היא נקודת מינימום ואיזו - נקודת מקסימום?

3. לפונקציה $y = x^3 - 4x^2 + 3$ יש שתי נקודות קיצון. האחת ב- $x = 0$ והשנייה ב- $x = \frac{8}{3}$. איזו נקודה היא נקודת מינימום ואיזו - נקודת מקסימום? מדוע?

4. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה רביעית יהיו שתי נקודות קיצון בלבד?
אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?

5. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה רביעית יהיו שלוש נקודות קיצון?
אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?



ההתנהגות הגלובלית של פונקציית פולינום

פעילות 9: הסקת תכונות של פונקציות פולינום על-פי התנהגותן הגלובלית

1. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה שלישית יש נקודת קיצון אחת בלבד?
אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?

2. נתון כי לפונקציה $y = -2x^3 + 4x^2 - 1$ יש שתי נקודות קיצון. האחת כאשר $x = 0$, והשנייה כאשר $x = \frac{4}{3}$. איזו נקודה היא נקודת מינימום ואיזו - נקודת מקסימום?

3. לפונקציה $y = x^3 - 4x^2 + 3$ יש שתי נקודות קיצון. האחת ב- $x = 0$ והשנייה ב- $x = \frac{8}{3}$. איזו נקודה היא נקודת מינימום ואיזו - נקודת מקסימום? מדוע?

4. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה רביעית יהיו שתי נקודות קיצון בלבד?
אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?

5. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה רביעית יהיו שלוש נקודות קיצון?
אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?



הקשר בין פונקציה לבין ההופכית לה



כרטיס מטרה

לפניכם שתי טבלאות:

בטבלה העליונה רשומים מאפיינים של הפונקציה ההופכית $\frac{1}{f(x)}$, בטבלה התחתונה רשומים ביטויים של פונקציות $f(x)$.

I. התאימו בין המאפיינים של הפונקציה ההופכית לבין הביטויים של הפונקציות.

שימו לב: למאפיין של פונקציה הופכית יכולים להתאים כמה ביטויים של פונקציות, וכן יכולים להיות ביטויים של פונקציות שאין להם התאמה מבין המאפיינים הנתונים.

II. לכל מאפיין של $\frac{1}{f(x)}$ בטבלה העליונה מצאו עוד ביטוי משלכם המתאים לפונקציה $f(x)$.

לאחר שסיימתם בדקו תשובותיכם בעזרת הישומון המצורף-בחלק של כתיבה חופשית.

הקשר בין פונקציה לבין ההופכית לה



$\frac{1}{f(x)}$ מאפיין של			
א. לפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ אין אסימפטוטות אנכיות.	ב. לפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יש ארבע אסימפטוטות אנכיות.	ג. לפונקציה $f(x)$ יש שלוש נקודות קיצון ואילו לפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יש שתי נקודות קיצון.	
ד. הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ חיובית בכל תחום הגדרתה.	ה. לפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ אין נקודות קיצון.	ו. הפונקציה $f(x)$ והפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ לא נחתכות ביניהן.	
ביטויים עבור הפונקציה $f(x)$			
1. $(x^4-1)(x^2-2x)$	2. $x^3(x^2-4)$	3. $(x-2)^6$	4. $(x-2)^2(x^2-1)$
5. x^4-3x^2+2	6. $x^3(x^2+4)$	7. x^4+3x^2+2	8. $\frac{16-x^4}{x^2-4}$

הקשר בין פונקציה לבין ההופכית לה



ד. הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ חיובית
בכל תחום הגדרתה.

ביטויים עבור הפונקציה $f(x)$			
1. $(x^4 - 1)(x^2 - 2x)$	2. $x^3(x^2 - 4)$	3. $(x - 2)^6$	4. $(x - 2)^2(x^2 - 1)$
5. $x^4 - 3x^2 + 2$	6. $x^3(x^2 + 4)$	7. $x^4 + 3x^2 + 2$	8. $\frac{16 - x^4}{x^2 - 4}$

הקשר בין פונקציה לבין ההופכית לה



מדרגה 1

הנחיות מ
גייסו ידע קודם... שאלו את עצמכם שאלות מתאימות, שיעזרו לפתור את הבעיה.

הקשר בין פונקציה לבין ההופכית לה



מדרגה 2

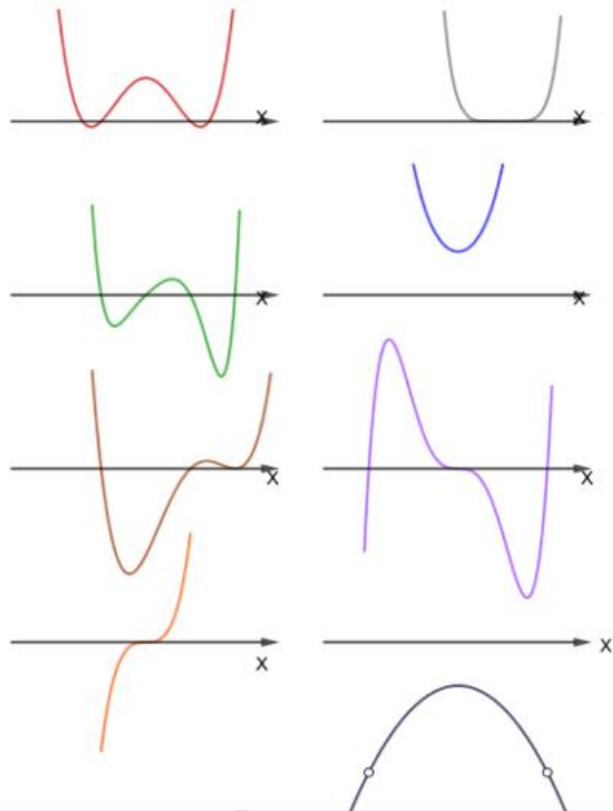
שימו לב לנקודות הבאות:

- מה הקשר בין מספר האסימפטוטות של $\frac{1}{f(x)}$ לתכונות הפונקציה $f(x)$? אם כך מה צריך לחשב?
- באילו מקרים מספר נקודות הקיצון של $\frac{1}{f(x)}$ יהיה קטן יותר ממספר נקודות הקיצון של $f(x)$?
- מה הקשר בין תחומי חיוביות/שליליות של $f(x)$ לאלו של $\frac{1}{f(x)}$?
- מהי התכונה המאפיינת את נקודות החיתוך בין $f(x)$ ל- $\frac{1}{f(x)}$, אם קיימות?

כדי לבצע את ההתאמות תוכלו לשרטט תחילה סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, כך שהפונקציה ההופכית תהיה בעלת המאפיין הנתון, ולאחר מכן למצוא ביטוי/ביטויים מתאימים מבין אלה הנתונים.

לאחר שסיימתם בדקו תשובותיכם בעזרת היישומון המצורף.

הקשר בין פונקציה לבין ההופכית לה



מדרגה 3

- לפניכם גרפים לפי הביטויים המופיעים בטבלה התחתונה שבכרטיס המטרה (מופיע רק ציר ה X).
בשלב ראשון התאימו בין הביטויים הנתונים של הפונקציות בכרטיס המטרה לבין הגרפים הנתונים,
בשלב שני התאימו בין המאפיינים של הפונקציה ההופכית, המופיעים בטבלה העליונה שבכרטיס המטרה, לבין
הביטויים של הפונקציות.
לאחר שסיימתם בדקו תשובותיכם בעזרת הישומון המצורף.



הזזה אופקית ואנכית של פונקציה

$$f(x) - 1$$

$$f(x + 1)$$

$$f(x) + 1$$

$$f(x)$$

$$f(x - 1)$$

הזזה ביחידה אחת

לכיוון שמאל

הזזה ביחידה אחת

לכיוון ימין

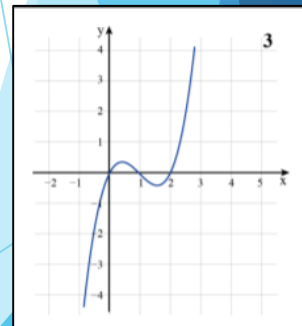
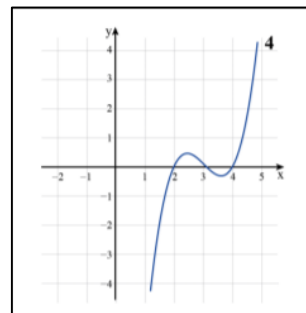
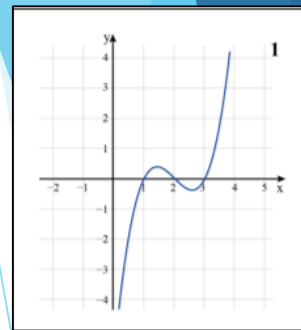
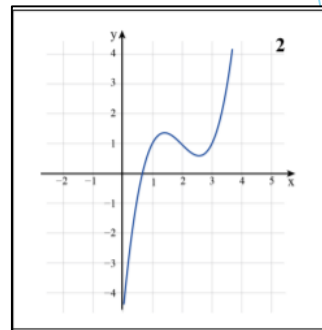
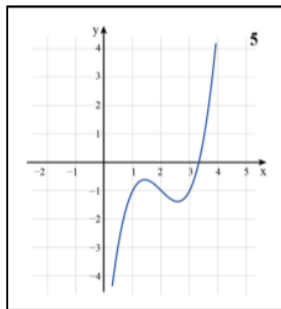
הזזה ביחידה אחת

כלפי מטה

הזזה ביחידה אחת

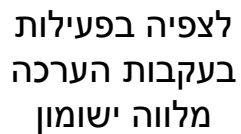
כלפי מעלה

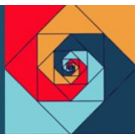
פונקציית המקור



[illegible]

הזזה אופקית ואנכית של פונקציה טבלת הערכה

[illegible]



להזיז את השטח הצידה

בפעילות זו נתמקד בסעיף האחרון של השאלה, בו מתבקשים למצוא את הקשר בין האינטגרלים של שתי פונקציות שהן הזזה אופקית אחת של השנייה.

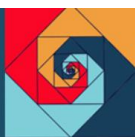
נשים לב שבהזזות אופקיות, כאשר מזיזים את גבולות האינטגרל בהתאם, ערך האינטגרל לא משתנה.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx$$

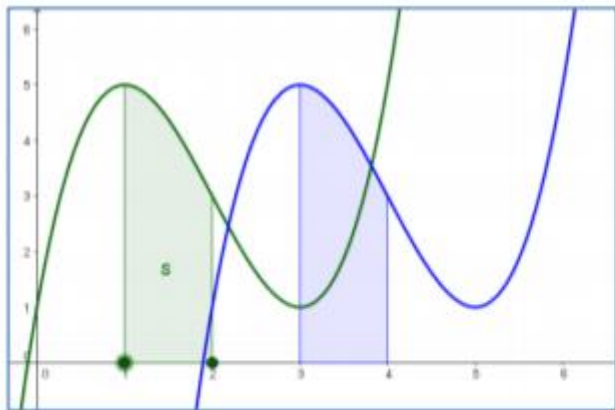
כמו כן ניתן לראות כי השטח המייצג את האינטגרל בפונקציה המקורית מוזז עם הפונקציה המוזזת. בפעילות נדרש גם להפעיל שיקולי סימטריה של פונקציה זוגית ואי זוגית.



בעזרת היישומון [אינטגרל של הזזה אופקית](#) ניתן להעלות השערות שאותן יש לנמק ולהוכיח. ביישומון אפשר לשנות את הפונקציה בהתאם לנדרש בחקירה.



להזיז את השטח הצידה



א. נתון גרף הפונקציה $f(x)$

ידוע כי השטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה

$f(x)$, הישרים $x=1$ ו- $x=3$ וציר ה- x הוא S .

גרף הפונקציה והשטח הוזזו 2 יחידות ימינה.

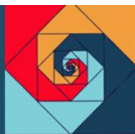
(ראו איור)

1. רשמו ביטוי לפונקציה $g(x)$ בעזרת $f(x)$.

2. אם ניתן, הביעו בעזרת S , את השטח הכלוא

מתחת לפונקציה $g(x)$.

3. רשמו אינטגרל לחישוב כל אחד מהשטחים.



להזיז את השטח הצידה

ב. נתון $\int_1^3 f(x)dx = S$

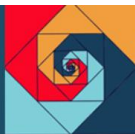
אם ניתן, רשמו ביטוי לערך האינטגרלים הבאים:

היעזרו בשרטוט סקיצה לגרפים וביישומון אינטגרל של הזזה אופקית.

1. $\int_3^5 f(x-3)dx$
2. $\int_{-1}^1 f(x+3)dx$
3. $\int_1^3 f(x-3)dx$
4. $\int_2^4 f(x-1)dx$



השביל המוביל
מן העמק
לפסגה יופיע
כאשר תבחר
לראות את
הדברים אחרת



להזיז את השטח הצידה

ד. נתון $\int_0^3 f(x)dx = S$ רשמו אם אפשר ביטוי לאינטגרלים הבאים:

1. $\int_0^6 f(x-3)dx$, כאשר ידוע $f(x)$ זוגית.

2. $\int_0^6 f(x-3)dx$, כאשר ידוע $f(x)$ אי זוגית.



שאלות תנועה והספק גישה גרפית

שאלות מילוליות 2009 ← 2018

קיץ 2009 מועד א'

רוכב אופניים יצא בשעה 08:00 מעיר A, ורוכב אופניים שני יצא בשעה 09:00 מעיר A. כל אחד מהרוכבים רכב במהירות קבועה לעיר B. המרחק בין A ל-B הוא 45 ק"מ. כאשר הרוכב הראשון הגיע לעיר B, הרוכב השני עדיין לא הגיע לעיר B והיה במרחק של 25 ק"מ ממנה.

מהירות הרוכב הראשון גדולה ב- m קמ"ש ממהירות הרוכב השני, וידוע כי $0 < m < 5$.

א. הבע באמצעות m את שני הפתרונות האפשריים למהירות הרוכב השני.

ב. נסמן את שני הפתרונות שהבעת בסעיף א ב- x_1 וב- x_2 .

מצא עבור אילו ערכי m מתקיים $|x_1 - x_2| < 11$.



קיץ 2018

שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.

אמיר רכב במהירות קבועה מעיר A לעיר B, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר B לעיר A.

אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר B שתיים אחרי שעבר על פני משה,

ואילו משה הגיע לעיר A 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.

בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר A לעיר B, במהירות קבועה.

נתון שיסמין הגיעה לעיר B אחרי אמיר, אך לפני שמושה הגיע לעיר A.

ג. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר A לעיר B.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

שאלות מילוליות 2009 ← 2018

נגדיר:

x המהירות של אמיר,

y המהירות של משה,

t זמן עד לפגישה

מהירות	זמן	דרך
אמיר עד פגישה	x	t
משה עד פגישה	y	t
אמיר אחרי פגישה	x	2
משה אחרי פגישה	y	8

הדרך של אמיר לפני הפגישה שווה לדרך שעבר משה אחרי הפגישה וההיפך:

$$\begin{cases} tx = 8y \\ ty = 2x \end{cases}$$

אחרי חלוקת המשוואות נקבל:

$$x = 2y$$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל:

$$t=4$$

הם יצאו בשעה 6:00 ונסעו 4 שעות עד לפגישה. אמיר ומשה חלפו זה על פני זה בשעה 10:00

שאלות מילוליות 2009 ← 2018

סעיף ב'1: לפי סעיף קודם $y = \frac{1}{2}x$ הדרך כולה שווה לסכום המרחקים שעברו משה ואמיר יחד עד לפגישה:

$$tx + ty = 4(x + y) = 4(x + \frac{1}{2}x) = 6x$$

6x	6	x	אמיר כל הדרך
6x	12	0.5x	משה כל הדרך
6x	6x/k	k	יסימין כל הדרך

סעיף ב'2: המהירות של אמיר מסומנת ב x

מכיוון שיסימין הגיעה לפני משה: $\frac{6x}{k} + 4 < 12$

$$\frac{6x}{k} + 4 < 12 \Rightarrow \frac{6x}{k} < 8 \Rightarrow 6x < 8k \Rightarrow \frac{3}{4}x < k$$

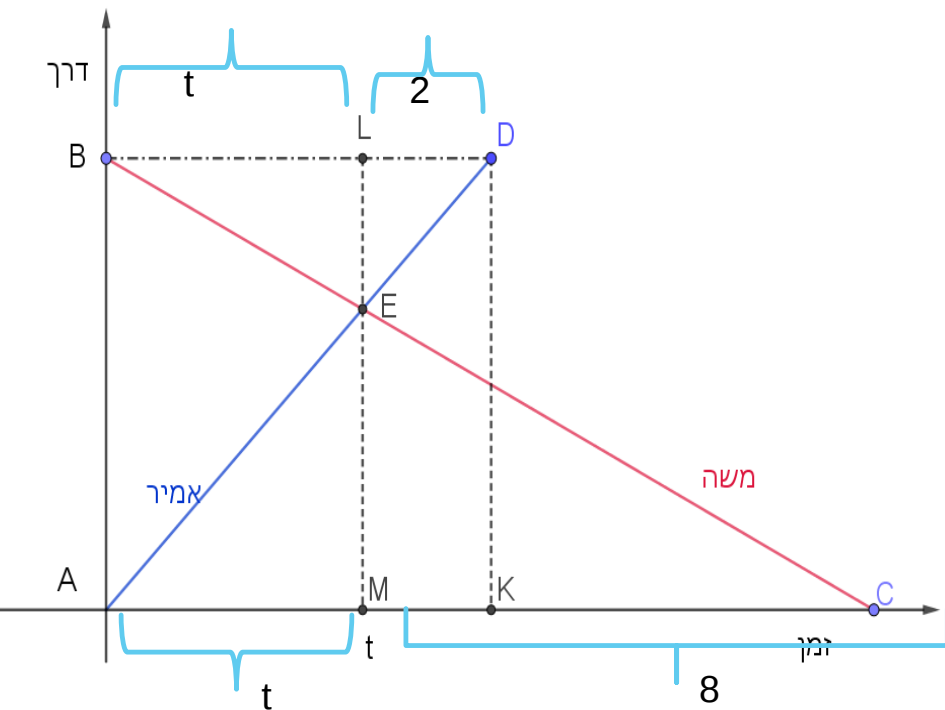
מכיוון שיסימין הגיעה אחרי אמיר: $\frac{6x}{k} + 4 > 6$

$$\frac{6x}{k} + 4 > 6 \Rightarrow \frac{6x}{k} > 2 \Rightarrow 6x > 2k \Rightarrow 3x > k$$

$$\frac{3}{4}x < k < 3x \quad \text{קיבלנו:}$$

שאלות מילוליות 2009 ← 2018

קיץ 2018



שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.

אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.

אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שתיים אחרי שעבר על פני משה,

ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V .

בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.

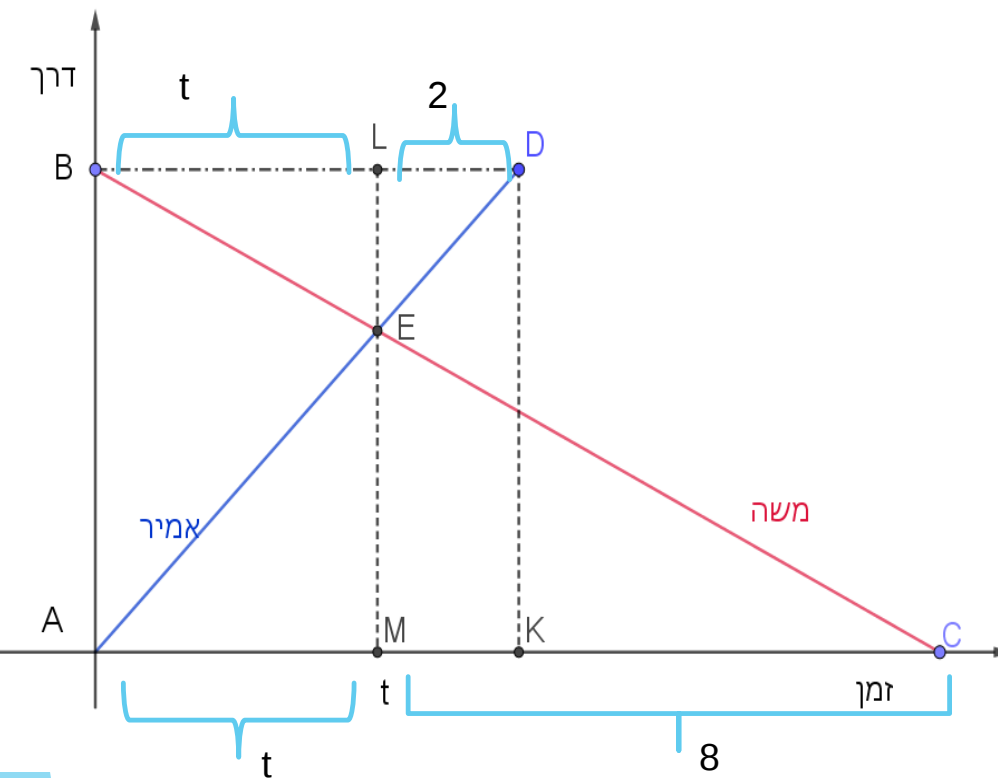
נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

ג. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

שאלות מילוליות 2009 ← 2018

קיץ 2018



שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.

אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.

אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה,

ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V .

בדיק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.

נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

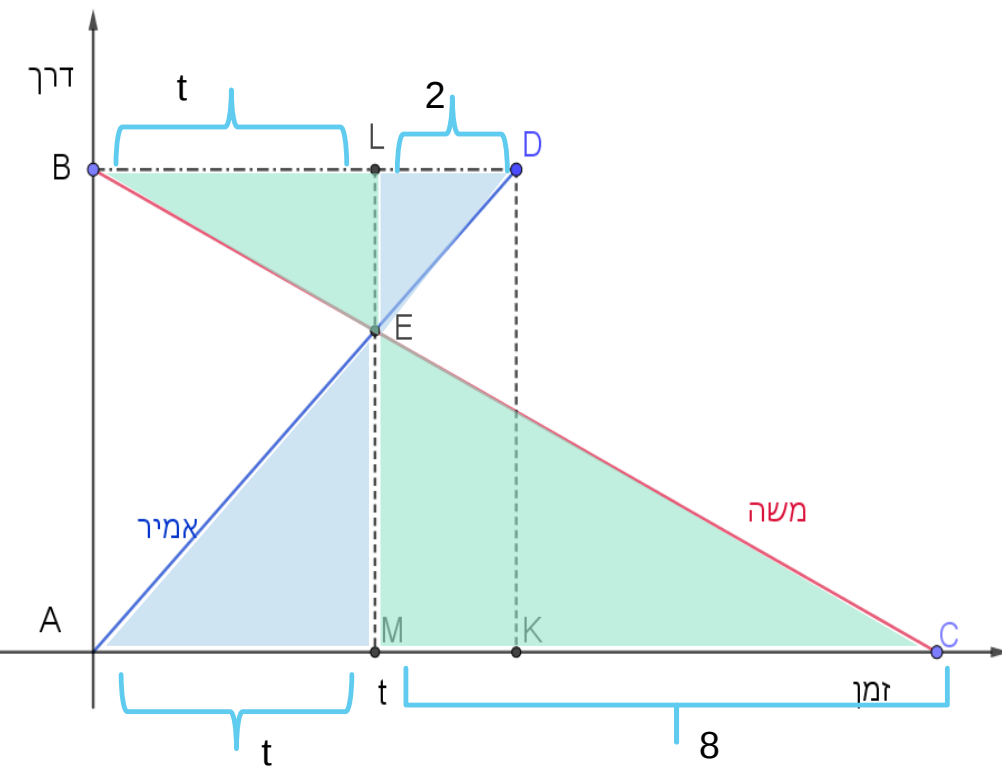
ב. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

שאלות מילוליות 2009 ← 2018

קִיץ 2018

לפי דימיון משולשים
(או משפט תלס):



$$\frac{BL}{MC} = \frac{LE}{EM}$$

$$\frac{LD}{AM} = \frac{LE}{EM}$$

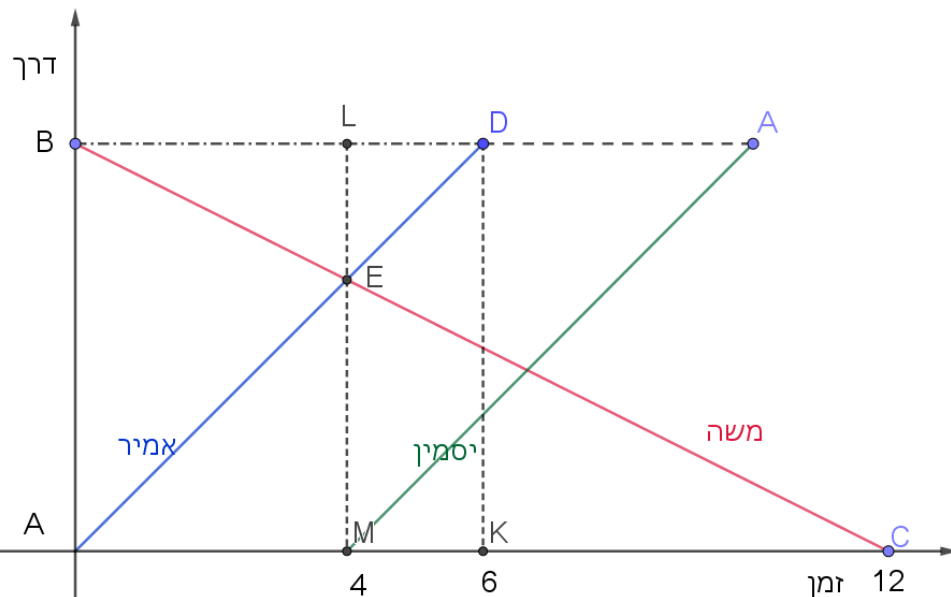
$$\frac{BL}{MC} = \frac{LD}{AM}$$

$$\frac{t}{8} = \frac{2}{t}$$

t=4

שאלות מילוליות 2009 ← 2018

קיץ 2018



אמיר נסע 6 שעות במהירות V
מכאן שאורך הדרך 6v ק"מ

זמן הנסיעה של יסמין הוא בין 2 שעות ל 8 שעות
נסמן את המהירות של יסמין ב x

$$2 < \frac{6v}{x} < 8 \quad / \cdot x \quad (x > 0)$$

$$2x < 6v < 8x \quad / :: 2$$

$$x < 3v < 4x$$

$$x < 3v \quad \text{וגם} \quad 3v < 4x$$

$$x < 3v \quad \text{וגם} \quad \frac{3}{4}v < x$$

$$\frac{3}{4}v < x < 3v$$

שאלות מילוליות בגישה גרפית

חומרי הוראה ולמידה

האתגר 5 מתמטיקה 5 יח"ל

שאלה 2

איציק ויוסי גרים באותו בניין. בוקר אחד הם יצאו מביתם ונסעו לים המלח, כל אחד במכוניתו.

המרחק מביתם לחוף ים המלח לאורך מסלול הנסיעה שבחרו הוא 200 ק"מ. איציק נהג במהירות של 60 קמ"ש, ויוסי נהג במהירות של 80 קמ"ש.

אחרי נסיעה של רבע שעה נזכר יוסי ששכח את בגד הים, והוא חזר הביתה לקחת אותו. אביו מסר לו את בגד הים, ויוסי המשיך מיד בנסיעתו לים המלח. הוא נסע כל הזמן במהירות של 80 קמ"ש.

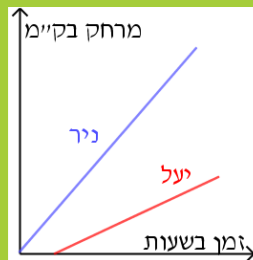
האם, לאחר יציאתם, יוסי חלף על פניו של איציק במהלך הנסיעה?

אם כן, מצאו מתי; אם לא, סמנו $\emptyset$. (חלף - משמעותו בנסיעה באותו כיוון או בכיוון מנוגד).
כעבור כמה שעות מתחילת הנסיעה יוסי חלף על פניו של איציק?

שאלות מילוליות בגישה גרפית

חומרי הוראה ולמידה

שאלה 3



☐ ניר ויעל יצאו מאותו מקום

☐ ניר רכב מהר יותר מיעל

☐ ניר ויעל יצאו באותה שעה

☐ ניר ויעל נסעו באותו כיוון

נקה

בדיקה



מקורות

ללמוד וללמד אנליזה, משרד החינוך - באתר מפמ"ר מתמטיקה

אתר מרכז המורים - אוניברסיטת חיפה

משימטיקה - מכון ויצמן

מדרגות ל 5 - אוניברסיטת חיפה

המרא"ה רואים את התמונה - אוניברסיטת חיפה

אתגר 5 - מט"ח

טיפ 5 - מט"ח

תודה על ההקשבה ובהצלחה



annav@amalnet.k12.il

חדו"א של פונקציה טריגונומטרית 2009 ← 2018

קץ 2009 מועד א'

א. נתונה הפונקציה נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$

$$f'(x) = 1 - \cos 2x$$

$$f'(x) = 1 - (1 - 2 \sin^2 x)$$

$$f'(x) = 2 \sin^2 x$$

הוכח !

ב. (1) פונקציית הנגזרת חיובית לכל $\sin x \neq 0$, כלומר עבור $x \neq \pi k$ ולכן הפונקציה עולה לכל x .

עבור $x = \pi k$ יהיה המשיק מקביל לציר ה- x , אך אלו תהיינה נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.

תשובה: לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.

(2) כפי שהראינו, עבור $x = \pi k$ יש נקודות פיתול, בהן המשיק מקביל לציר ה- x , אך תיתכנה נוספות:

$$f''(x) = 4 \sin x \cos x$$

$$f''(x) = 2 \sin 2x$$

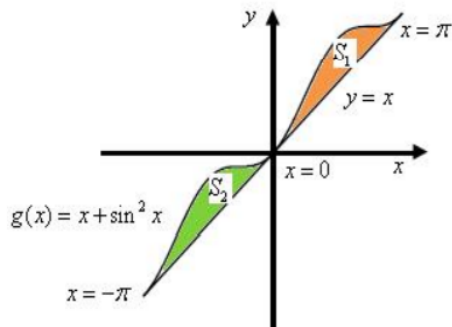
$$\sin 2x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} k$$

כלומר, נקודות פיתול תהיינה עבור $x = \frac{\pi}{2} k$ (הערה – ניתן להסתפק בהסבר של סעיף ב (1))

תשובה: לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול

חדו"א של פונקציה טריגונומטרית 2009 ← 2019

קץ 2009 מועד א'



ג. נמצא את נקודות החיתוך בין $g(x) = x + \sin^2 x$

לישר $y = x$, בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

$$x + \sin^2 x = x$$

$$\sin^2 x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = -\pi, x = 0, x = \pi$$

$x + \sin^2 x \geq x$ ולכן גרף הפונקציה $g(x)$ מעל לישר $y = x$

$$S = \int_0^\pi (x + \sin^2 x - x) dx + \int_{-\pi}^0 (x + \sin^2 x - x) dx$$

$$S = \int_0^\pi (\sin^2 x) dx + \int_{-\pi}^0 (\sin^2 x) dx$$

$$S = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_0^\pi + \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_{-\pi}^0 \leftarrow \pi$$

$$S = \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\pi)}{4} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(2 \cdot 0)}{4} \right) \right) + \left(\left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(2 \cdot 0)}{4} \right) - \left(\frac{-\pi}{2} - \frac{\sin(-2\pi)}{4} \right) \right)$$

$$S = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{S = \pi}$$

תשובה: π יח"ר

שאלות מילוליות 2009 ← 2019

קיץ 2009 מועד א'

א. נסמן ב- x את מהירות הרוכב השני שיצא מ- A ולכן מהירות הרוכב הראשון $x+m$.

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

מהירות - v קמ"ש	זמן - t שעות	דרך-מרחק - s ק"מ	
$x+m$	$\frac{45}{x+m}$	45	רוכב ראשון
x	$\frac{20}{x}$	20	רוכב שני

הרוכב השני נסע שעה אחת פחות, עד אשר הרוכב הראשון הגיע ל- B

$$\frac{45}{x+m} = \frac{20}{x} + 1 \text{ היא כן, אם כן, המשוואה המתאימה, אם כן, היא } \frac{45}{x+m} = \frac{20}{x} + 1$$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{45}{x+m} = \frac{20}{x} + 1 \quad / \cdot x(x+m) \neq 0$$

$$45x = 20(x+m) + x(x+m)$$

$$45x = 20x + 20m + x^2 + mx$$

$$x^2 + (m-25)x + 20m = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25-m \pm \sqrt{(m-25)^2 - 80m}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{25-m \pm \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}$$

שאלות מילוליות 2009 ← 2019

קיץ 2009 מועד א'

על פנת שיהיה פתרון לבעיה, נדרש $\Delta \geq 0$

$$m^2 - 130m + 625 \geq 0$$

$$m_{1,2} = \frac{130 \pm 120}{2} \rightarrow m = 125, m = 5$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, הרי ש: $m \leq 5$ או $m \geq 125$

כיוון שנתון כי $0 < m < 5$, הרי שיש שני פתרונות לבעיה.

$$\text{תשובה: } x_2 = \frac{25 - m - \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}, x_1 = \frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}$$

שאלות מילוליות 2009 ← 2019

קיץ 2009 מועד א'

ב. נדרש $x_1 - x_2 < 11$ (לא צריך ערך מוחלט כי סימנו את x_1 כפתרון הגדול מבין השניים).

$$x_1 - x_2 = \frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} - \frac{25 - m - \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}$$
$$\sqrt{m^2 - 130m + 625} < 11$$

ניתן להעלות בריבוע, ללא חשש מפתרונות זרים, כי עבור $0 < m < 5$ הראינו שהביטוי בתוך השורש חיובי

$$m^2 - 130m + 625 < 121$$

$$m^2 - 130m + 504 < 0$$

$$m_{1,2} = \frac{130 \pm 122}{2} \rightarrow m = 4, \quad m = 126$$

כיוון שזו פרבולה בעלת מינימום, נקבל $4 < m < 126$

ובחיתוך עם התנאי $0 < m < 5$ נקבל $4 < m < 5$

תשובה: $4 < m < 5$

